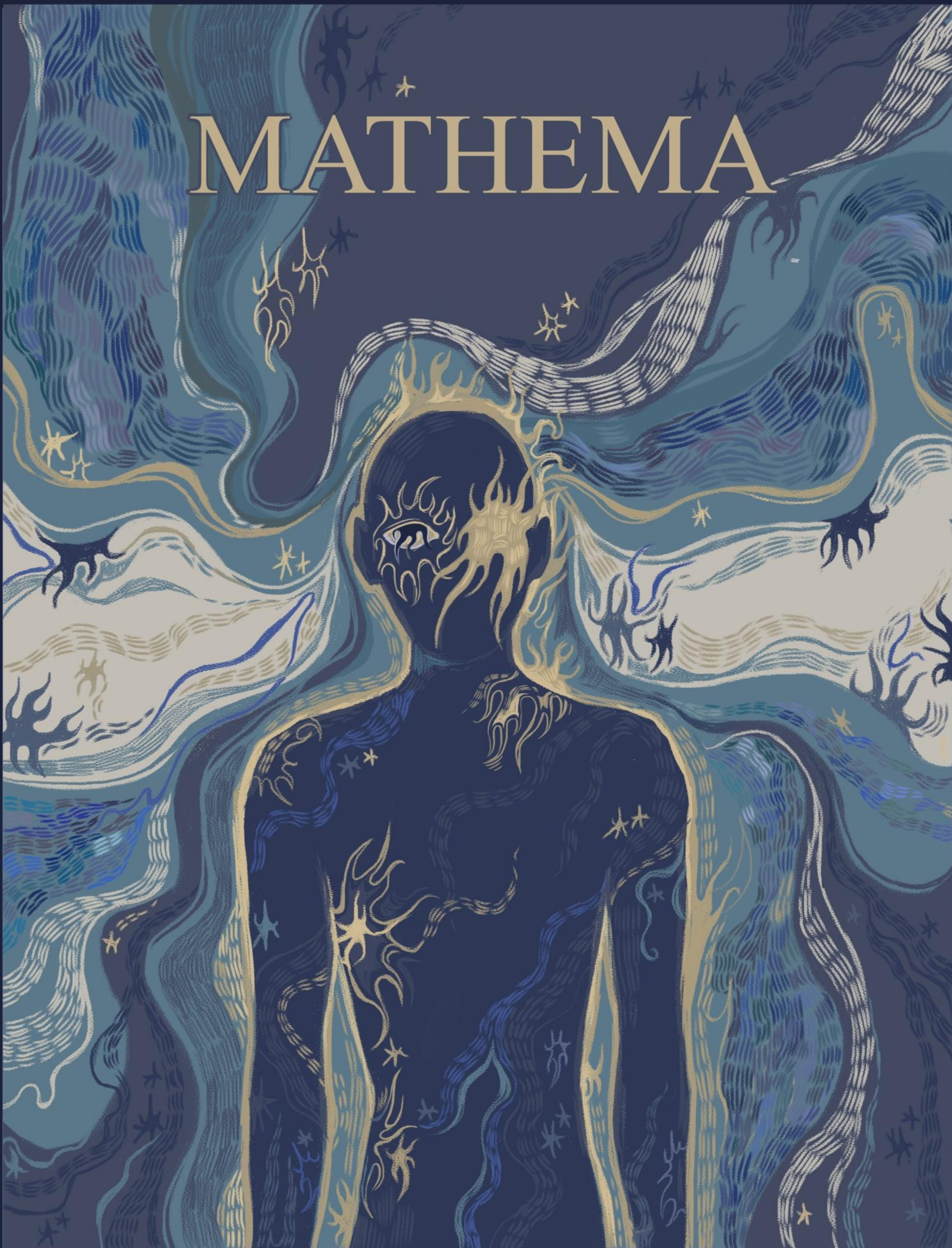
MATHEMA



Elevii clasei X I - Colegiul Național ,,Gheorghe Lazăr" Sibiu

Coordonator: prof. Dorca Doriana

MATHÈMA

INEGALITĂȚI MATEMATICE

SIBIU

2022

ISBN 978-973-0-37481-0

INEGALITĂȚI MATEMATICE

CUPRINS

Inegalitatea lui Bergström

Albescu David, Bîja Alexandra și
Dospinescu Miruna

Teoremă

Dacă $x_k \in \mathbb{R}$ şi $a_k > 0$, atunci:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}.$$

Generalizarea inegalităţii lui Bergström este dată de următoarea teoremă:

Dacă $x_k \in \mathbb{R}$ şi $a_k > 0,\ k \in \{1, 2, \cdots, n\},$ atunci:

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} + \max_{1 \leq j < \leq n} \frac{(a_i x_j - a_j x_i)^2}{a_i a_j (a_i + a_j)}.$$

Aplicație

(ONM 2021) Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c > 0$ are loc inegalitatea:

$$0(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+7$$

Desfăcând parantezele din membrul stâng obține

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \geq \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+7$$

Trebuie demonstrat că $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \geq \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}+4$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)=\left(\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ac}\right)+\left(\frac{b^2}{ab}+\frac{a^2}{ac}+\frac{c^2}{bc}\right)$$

Aplicăm inegalitatea Bergstrom pentru fiecare paranteză:

$$\left(\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{bc}+\frac{c^2}{ac}\right)+\left(\frac{b^2}{ab}+\frac{a^2}{ac}+\frac{c^2}{bc}\right)\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}+\frac{(b+a+c)^2}{ab+ac+bc}=2\cdot\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}$$

$$2\cdot\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}=2\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}=\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+4$$

Astfel, inegalitatea din enunț este demonstrată.

Bibliografie:
https://math.fandom.com/ro/wiki/Inegalitatea_lui_Bergstrom

Inegalitatea lui Bernoulli

Țeposu Vlad și Tusan Radu

Despre inegalitate:

Inegalitatea lui Bernoulli, descoperită în 1689 de Jacob Bernoulli, este o inegalitate care aproximează exponenții lui ***"1+a"***, care studiază mulțimea numerelor reale și stă la bazelele analizei acestoa.

Aceasta este cel mai des folosită pentru a dovedi alte inecuații importante cum ar fi: Inegalitatea lui Young, Holder si Minkowski.0

Teoremă

$(1 + a)^n \geq 1+ na$ pentru oricare ar fi $\boldsymbol{n \in N}$ și $\boldsymbol{a \in R, a}$ **> -1**

Aceasta are și anumite variații, cum ar fi:

1. **$(1 + a)^n \geq 1+ n \cdot a$**, dacă **n** este par, atunci **a** poate fi orice număr real
2. **$(1 + a)^n \leq 1+ n \cdot a$**, pentru orice **n** $\in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, si **a** $\in \mathcal{R}$ | **a** $\geq$ **-1**

Demonstrație:

Inegalitatea se poate dovedi cu ajutorul inducției, dovedind că relația este adevărată pentru **n** ∈ **{0,1}**, iar apoi dovedind că dacă ecuația este validă pentru **"n"**, oricare are fi el, este adevărată și pentru **"n+2"**.

1. Dovedim că ecuația este validă pentru **"n=0"**

   $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$, care prin calcule rezultă că $1 \geq 1$, care este adevărat.

2. Dovedim că ecuația este validă pentru **"*n=1*"**
   $(1 + a)^1 \geq 1 + 1 \cdot a$, din care rezulta ca $1 + a \geq 1 + a$, care este și asta adevărată

3. Presupunem că ecuația este adevărată pentru **"n=k"**, iar apoi dovedim pentru **"n=k+2"**
   $(1 + a)^k \geq 1 + k \cdot a$

   $(1 + a)^{k+2} \geq (1 + ka)(1 + 2a + a^2)$, *deoarece* $(1+a)^2 \geq 0$, *rezultă*
   $(1 + a)^k (1 + a)^2 \geq 1 + 2a + a^2 + ka + 2ka^2 + ka^3$
   $(1 + a)^k (1 + a)^2 \geq \underline{1 + a(k+2) + 2ka^2(a+2) + a^3 \geq 1 + a(k+2)}$

Deoarece $a^2 \geq 0$ si $a+2 \geq 0$, după inducția modificată presupunem că inegalitatea este validă pentru orice număr $r \in \aleph \mid r \geq 0$.

Generalizare:

$\forall a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in ((-1, \infty))^n$, $n \in N^*$, cu toţi a_k de acelaşi semn ,

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Aplicații

1) Să se arate că dacă n>9900, atunci $1{,}01^n > 100$.

   Rezolvare:

   Conform inegalității lui Bernoulli: $1{,}01^n = (1+\frac{1}{100})^n > 1 + \frac{n}{100} > 1 + 99 = 100$

2) Să se arate că $6^{90} > 5^{94}$.

   Rezolvare:

   Avem $6^{90} > 5^{94} \Leftrightarrow (6^{45})^2 > (5^{47})^2 \Leftrightarrow 6^{45} > 5^{47} \Leftrightarrow (\frac{6}{5})^{45} > 5^2$.

   Dar $(\frac{6}{5})^5 = (1+\frac{1}{5})^5 > 1 + 5 \cdot \frac{1}{5} = 2$ și atunci $(\frac{6}{5})^{45} > 2^9 > 25$.

Bibliografie:

https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli%27s_inequality
https://math.stackexchange.com/questions/3025737/where-does-one-even-need-bernoullis-inequality
https://mathworld.wolfram.com/BernoulliInequality.html

Inegalitățile mediilor

Alexandru Alexandrov, Crețu Victor
și Junger Ernest

Inegalitatea mediilor pentru **două** numere***:***

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,\mathbf{,}\ \forall a,b>0$$

Inegalitatea mediilor pentru **trei** numere:

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\,\mathbf{,}\ \forall a,b,c>0$$

Inegalitatea mediilor pentru n numere, $n \in \mathbb{N}, n \ge 2$***:***

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\,,$$

$$\forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$$

Vom demonstra inegalitățile mediilor pentru două numere:

$m_h \le m_g$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$$

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \,|(\ )^2$$

$$\frac{4a^2b^2}{a^2+2ab+b^2} \le ab \,|:(ab)$$

$$\frac{4ab}{a^2+2ab+b^2} \le 1 \,|\cdot (a^2+2ab+b^2)$$

$$4ab \le a^2+2ab+b^2 \,|-4ab$$

$$0 \le a^2-2ab+b^2$$

$$0 \le (a-b)^2$$

$m_g \le m_a$

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \,|(\ )^2$$

$$ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \,|\cdot 4$$

$$4ab \le a^2+2ab+b^2 \,|-4ab$$

$$0 \le a^2-2ab+b^2$$

$$0 \le (a-b)^2$$

$m_a \le m_p$

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \,|(\ )^2$$

$$\frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2} \,|\cdot 4$$

$$(a+b)^2 \le 2a^2+2b^2$$

$$a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2 \,|-\left(a^2+2ab+b^2\right)$$

$$0 \le a^2+b^2-2ab$$

$$0 \le (a-b)^2$$

Aplicații

Demonstrați că oricare ar fi $a,b,c>0$, au loc inegalitățile:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \ge \sqrt[3]{abc}.$$

Rezolvare:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

Care este adevărată pentru orice a,b,c strict pozitive.

Apoi avem, prin ridicare la pătrat:

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)},$$

inegalitate adevărată dacă ținem cont de inegaliatea mediilor aplicată numerelor *ab,bc,ca*.

Determinați valoarea minimă a expresiei: $E(x,y) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

Aplicând de două ori inegalitatea mediilor, obținem :

$$E(x) = x^4 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} \geq 2\sqrt{x^4y^4} + \frac{2}{x^2y^2} = 2\left(x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2}\right) \geq 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2y^2 \cdot \frac{1}{x^2y^2}} = 4.$$

Deci valoarea minimă este 4.

Bibliografie :

Manuela Prajea- Introducere în inegalități
http://www.mathlinks.ro
Drimbe, M. O., Inegalităţi, idei şi metode, Editura Gil, Zalău, 2003

Inegalitatea rearanjării

Vom intra în subiectul lucrării noastre cu un exemplu, o problemă dată la un concurs de matematică în China, în 1978:

Zece oameni stau la coadă în fața unui robinet cu apă pentru a-și umple gălețile. Fiecare găleată necesită un timp diferit pentru a se umple. În ce ordine ar trebui să fie așezați oamenii în așa fel încât să se reducă la minimum timpul lor de așteptare?

Teoretic, ordinea de așteptare ar fi ordinea crescătoare a timpului de umplere a găleților. Vom nota cu $T_1 < T_2 < \ldots < T_{10}$ timpul necesar pentru a umple gãleţile respective. Dacă oamenii se pun la coadã în ordinea sugeratã, timpul de aşteptare va fi dat de :

$T = 10T_1 + 9T_2 + \ldots + T_{10}$.

Pentru o ordine de aşezare diferitã , timpul de aşteptare va fi :

$S = 10 S_1 + 9 S_2 + \ldots + S_{10}$, unde $(S_1, S_2, \ldots, S_{10})$ este o permutare a şirului $(T_1, T_2, \ldots, T_{10})$

Se va ajunge la $(T_1, T_2, \ldots T_{10})$ în cel mult 9 paşi. Având în vedere cã timpul de aşteptare este redus cu fiecare pas, T este într-adevãr timpul de aşteptare minim.

Putem generaliza acest exemplu, cu urmãtorul rezultat:

Teorema rearanjãrii

Fie $(a_i)_{i=\overline{1,n}}$ un şir monoton crescãtor şi $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ un şir finit oarecare. Şirurile $(x_i)_{i=\overline{1,n}}$ monoton descrescãtor şi $(y_i)_{i=\overline{1,n}}$ monoton crescãtor sunt obţinute prin permutarea termenilor şirului $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$. Atunci avem relaţia :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i\, y_i$$

Demonstraţie:

Fie $1 \leq k \leq l \leq n$ şi şirul $(b'_i)_{i=\overline{1,n}}$ obţinut din $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ prin permutarea termenilor b_k şi b_l . Avem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b'_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leq a_k b_l + a_l b_k - a_k b_k - a_l b_l = -(a_k - a_l)(b_k - b_l).$$

Deci valoarea sumei scade dacã b_k şi b_l sunt ordonaţi crescãtor şi creşte dacã b_k şi b_l sunt ordonaţi descrescãtor. Aplicând procedeul în mod repetat, se obţine inegalitatea din enunţ.

Observaţie:

Pe scurt, putem spune astfel: Dacã şirurile $(a_i)_{i=\overline{1,n}}$ şi $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt monotone de acelaşi sens, atunci orice permutare a termenilor şirului $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ duce la o scãdere a valorii sumei $\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$, iar dacã şirurile sunt monotone de sens contrar, atunci orice permutare a termenilor şirului $(b_i)_{i=\overline{1,n}}$ duce la o creştere a valorii sumei $\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i$.

Corolar 1:

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale şi $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ o permutare a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Atunci avem:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n.$$

Corolar 2:

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale şi $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ o permutare a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Atunci avem:

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \cdots + \frac{a'_n}{a_n} \geq n$$

Aplicaţii

(Olimpiada internaţionalã de matematicã 1975)

Fie $x_1 \leq x_2 \leq .. \leq x_n$ şi $y_1 \leq y_2 \leq .. \leq y_n$ numere reale, iar $z_1, z_2, \ldots, z_n$ o permutare a numerelor $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Demonstraţi cã :

$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots .(x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2$.

Rezolvare:

Avem ${y_1}^2 + {y_2}^2 + \ldots + {y_n}^2 = {z_1}^2 + {z_2}^2 + \ldots + {z_n}^2$. Dupã efectuarea calculelor , inegalitatea cerutã este echivalentã cu :

$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \geq x_1 z_1 + x_2 z_2 + \cdots + x_n z_n$,care rezultã din inegalitatea rearanjãrii.

(Olimpiada internaţionalã de matematicã 1964)

Fie a, b şi c laturile unui triunghi. Demonstraţi cã:

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$

Rezolvare:

Putem presupune $a \geq b \geq c$. Demonstrãm mai întâi cã $c(a+b-c) \geq b(c+a-b) \geq a(b+c-a)$. Avem $c(a+b-c)-b(c+a-b)=(b-c)(b+c-a) \geq 0$. La fel se demonstreazã a doua inegalitate. Conform inegalitãţii rearanjãrii (IR) , avem:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c).$$

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c).$$

Adunând cele douã inegalitãţi , în membrul drept se obţine *6abc* şi apoi inegalitatea din enunţ.

Bibliografie:

1.Engel, Arthur, Probleme de matematicã-strategii de rezolvare, editura Gil, 2006, pag.203-205
2. https://brilliant.org/
3. https://artofproblemsolving.com
4. https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra

Inegalități de tip Cebâșev

Maria Penteleiciuc, Anamaria Orza
și Anastasia Fleacă

Pafnuti Lvovici Cebîșev a fost un matematician rus, cu contribuții în domeniul probabilităților, statisticii și teoriei numerelor. Acesta este considerat ca fiind al doilea cel mai mare matematician rus, după Nicolai Ivanovici Lobacevski.

Cebîșev și-a desfășurat activitatea de profesor universitar în Sankt Petersburg. A fost membru al Academiilor de Științe din Sankt Petersburg, Berlin și Paris, precum și al Royal Society din Londra.

Ca profesor, Cebîșev era ordonat, punctual, pedant și îngrijit. A dus o viață cumpătată, aparent monotonă, dar plină de rezultate în cele mai diferite domenii ale matematicii.

Inegalități de tip Cebâșev

Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și avem două secvențe de aceeași monotonie, adică :

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ și $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$, atunci:

1) $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq a_1b_1' + a_2b_2' + ... + a_nb_n' (\leq a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1)$,
unde $b_1', b_2', ..., b_n'$ reprezintă o permutare a numerelor $b_1, b_2, ..., b_n$.

2) $n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$.

Dacă $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și avem două secvențe de monotonie inversă, adică :

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ și $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$, atunci:

1) $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq a_1b_1' + a_2b_2' + ... + a_nb_n' (\leq a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1)$,
unde $b_1', b_2', ..., b_n'$ reprezintă o permutare a numerelor $b_1, b_2, ..., b_n$.

2) $n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$.

Aplicație

Arătați că oricare ar fi $a, b, c > 0$ are loc: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{c+b} \geq \frac{3}{2}$

Rezolvare:

Cum a,b,c sunt sumere reale rezultă că există o ordine între ele.

Faptul că inegalitatea este simetrică ne permite să presupunem că $a \leq b \leq c$.

Vom verifica dacă $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$

$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \Leftrightarrow c+a \leq c+b \Leftrightarrow a \leq b$ (A)

$$\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow a+b \leq c+a \Leftrightarrow b \leq c \text{ (A)}$$

=> avem 2 șiruri la fel ordonat, deci putem aplica inegalitatea lui Cebîșev astfel:

$$a \cdot \frac{1}{b+c} + b \cdot \frac{1}{c+a} + c \cdot \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)$$

Rămâne de demonstrat că $\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left((b+c)+(c+a)+(a+b)\right)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)$$

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem :

$$\frac{1}{6}\left((b+c)+(c+a)+(a+b)\right)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{1}{6}\left(\sqrt{b+c} \cdot \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \sqrt{c+a} \cdot \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \sqrt{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left((b+c)+(c+a)+(a+b)\right)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2}.$$

Mai multe probleme:

1. $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \quad \forall a,b \geq 0$
2. $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a, \quad \forall a,b,c > 0$
3. $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq 4, \quad \forall x,y,z \geq 1, x+y+z=4$
4. $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}, \quad \forall a,b,c > 0$
5. $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x,y,z,t \geq -1, x+y+z+t=2$
6. $a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*, distincte$

Bibliografie:

https://www.youtube.com/watch?v=mIQo11PlrvI

https://ro.wikipedia.org/wiki/Pafnuti_Cebisev

Inegalități trigonometrice

Daniel Bischin și Andrei Corabian

Prin inegalități trigonometrice ne referim la acele probleme unde ni se cere să găsim relații de comparație între lungimi de segmente, unghiuri, arii, volume și funcții trigonometrice.

Metodele de rezolvare variază, însă aproape de fiecare dată ne sunt utile formulele și identitățile geometrice, care deosebesc aceste tipuri de inegalități de cele algebrice.

Aducem astfel la atenția cititorului o serie de probleme la care li se adaugă și rezolvările, din care putem desprinde anumite metode pentru rezolvarea acestui tip de exerciții.

Aplicații:

1. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ pentru care $a^2+b^2-ab=c^2$. Demonstrați că $(a-b)(b-c)\leq 0$.

La prima vedere poate vă întrebați de ce am inclus această problemă la capitolul trigonometrie, dar îndoielile vor fi curând rezolvate.

Rezolvare:

Considerăm numerele a,b și c ca fiind lungimile laturilor triunghiului ABC, folosind notațiile uzuale.

$c^2=a^2+b^2-ab=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(60°)=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\sphericalangle C) \Rightarrow \sphericalangle C=60°$, ceea ce ne conduce spre două cazuri:

I. $\sphericalangle A\leq 60°$ și $\sphericalangle B\geq 60°$. Astfel, $\sphericalangle A\leq\sphericalangle C\leq\sphericalangle B$, de unde rezultă , din inegalitatea triunghiului, că $a\leq c\leq b$.

Așadar $a-b\leq 0$ și $b-c\geq 0 \Rightarrow (a-b)(b-c)\leq 0$.

II. $\sphericalangle A\geq 60°$ și $\sphericalangle B\leq 60°$. Astfel, $\sphericalangle B\leq\sphericalangle C\leq\sphericalangle A$, de unde rezultă , din inegalitatea triunghiului, că $b\leq c\leq a$.

Așadar $a-b\geq 0$ și $b-c\leq 0 \Rightarrow (a-b)(b-c)\leq 0$.

2. *(Inegalitatea lui Euler)*
Demonstrați că în orice triunghi ABC are lor relația $R\geq 2r$.

Rezolvare:

Ne vom folosi de formulele pentru aria unui triunghi:

$$S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow R=\frac{abc}{4S} \text{ și } S=p\cdot r\Rightarrow r=\frac{S}{p}$$

Astfel, este suficient să demonstrăm că $\frac{abc}{4S} \geq \frac{2S}{p} \Leftrightarrow abc \geq \frac{8S^2}{p}$

Din formula lui Heron, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow abc \geq \frac{8 \cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = 8(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$abc \geq (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) \Leftrightarrow abc \geq (a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)$$

$$\Leftrightarrow abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)\ (1)$$

Rămâne de demonstrat inegalitatea anterioară.

Din inegalitatea triunghiului știm că termenii produsului membrului drept sunt pozitivi.

Vom aplica inegalitatea $MG \leq MA$ astfel:

$$\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)} \leq \frac{b+c-a+a+c-b}{2} = \frac{2c}{2} = c$$

$$\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)} \leq \frac{a+c-b+a+b-c}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)} \leq \frac{b+c-a+a+b-c}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

Înmulțind relațiile de mai sus vom obține exact *(1)*. Astfel, deducem că $R \geq 2r$.

3. *OIM 1983*
Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstrați că

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Rezolvare:

Fiind lungimile laturilor unui triunghi, există $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ pentru care $a = y+z$, $b = z+x$ și $c = x+y$. Inegalitatea din enunț devine astfel:

$$(y+z)^2(z+x)(y+z-z-x) + (z+x)^2(x+y)(z+x-x-y) + (x+y)^2(y+z)(x+y-y-z) \geq 0$$

$$(y^2+2yz+z^2)(z+x)(y-x) + (z^2+2zx+x^2)(y+x)(z-y) + (y^2+2yx+x^2)(y+z)(x-z) \geq 0$$

$$(y^2+2yz+z^2)(zy-zx+xy-x^2) + (z^2+2zx+x^2)(yz-y^2+xz-xy) +$$
$$+(y^2+2yx+x^2)(yx-yz+zx-z^2) \geq 0$$

Inegalitatea de mai sus se reduce la $x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$

Dacă împărțim inegalitatea anterioară prin xyz, obținem $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq x+y+z$, inegalitate adevărată ce reiese din inegalitatea lui Bergstrom: $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq \frac{(x+y+z)^2}{y+z+x} = x+y+z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. Astfel, inegalitatea din enunț este demonstrată.

4. *OIM 1991*
Dacă într-un triunghi ABC, bisectoarele AD, BE, CF se intersectează într-un punct I, atunci $\frac{IA}{AD} \cdot \frac{IB}{BE} \cdot \frac{IC}{CF} \leq \frac{8}{27}$

Rezolvare:

Ne vom folosi de teorema bisectoarei, conform căreia știm că bisectoarea împarte latura opusă într-un raport egal cu raportul celorlalte două laturi.

Folosim notațiile uzuale, pentru care $AB=c, BC=a, AC=b$.Notăm $BD=x$ și $CD=y$.

$\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD} \Leftrightarrow \frac{c}{b}=\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{c+b}{b}=\frac{x+y}{y}$, iar cum $a=x+y \Rightarrow \frac{c+b}{b}=\frac{a}{y} \Leftrightarrow y=\frac{ab}{b+c}$.

În $\triangle ADC$, CI este bisectoare $\Rightarrow \frac{CA}{CD}=\frac{AI}{ID} \Leftrightarrow \frac{b}{y}=\frac{AI}{ID} \Leftrightarrow \frac{b}{y+b}=\frac{AI}{ID+AI} \Leftrightarrow \frac{b}{\frac{ab}{b+c}+b}=\frac{AI}{AD}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a}{b+c}+1}=\frac{AI}{AD} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{a+b+c}{b+c}}=\frac{AI}{AD} \Leftrightarrow \frac{b+c}{a+b+c}=\frac{AI}{AD}$

Procedând analog obținem $\frac{BI}{BE}=\frac{a+c}{a+b+c}$ și $\frac{CI}{CF}=\frac{a+b}{a+b+c}$.

Înlocuind în inegalitatea din enunț, obținem că trebuie demonstrată următoarea relație:

$$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27} \; \textit{(1)}$$

Din $MG \leq MA$ avem $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{a+b+b+c+c+a}{3} = \frac{2(a+b+c)}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}{a+b+c} \leq \frac{2}{3}$, iar ridicând inegalitatea la puterea a treia obținem *(1)*.

Astfel problema este rezolvată.

5.Într-un cerc se înscrie triunghiul ABC. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele arcelor BC, CA, AB.

Demonstrați că $S_{A_1B_1C_1} \geq S_{ABC}$.

Rezolvare:

A_1 mijlocul arcului $BC \Rightarrow m(AC_1) = \dfrac{m(AB)}{2} = C$

B_1 mijlocul arcului AC $\Rightarrow m(AB_1) = \dfrac{m(AC)}{2} = B$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle B_1A_1C_1) = \frac{m(B_1A) + m(AC_1)}{2} = \frac{C+B}{2}$$

Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt înscrise în același cerc $\Rightarrow$ au aceeași rază a cercului circumscris R

T sinusului $\Rightarrow B_1C_1 = 2R \cdot \sin(\sphericalangle B_1A_1C_1) = 2R \cdot \sin(\dfrac{B+C}{2}) = 2R \cdot \cos(\dfrac{A}{2})$

În mod analog se obține că $A_1B_1 = 2R \cdot \cos(\dfrac{C}{2})$, iar $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \dfrac{A+C}{2}$

$$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin(A_1B_1C_1)}{2} = \frac{2R \cdot \cos(\frac{A}{2}) \cdot 2R \cdot \cos(\frac{C}{2}) \cdot \sin(\frac{A+C}{2})}{2}$$

$$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = 2R^2 \cdot \cos(\frac{A}{2}) \cdot \cos(\frac{B}{2}) \cdot \cos(\frac{C}{2})$$

De asemenea, $S_{ABC} = 2R^2 \cdot \sin(\mathrm{A}) \cdot \sin(B) \cdot \sin(C)$.

Astfel, trebuie demonstrat că $2R^2 \cdot \cos(\dfrac{A}{2}) \cdot \cos(\dfrac{B}{2}) \cdot \cos(\dfrac{C}{2}) \geq 2R^2 \cdot \sin(\mathrm{A}) \cdot \sin(B) \cdot \sin(C)$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{A}{2}) \cdot \cos(\frac{B}{2}) \cdot \cos(\frac{C}{2}) \geq \sin(\mathrm{A}) \cdot \sin(B) \cdot \sin(C)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\frac{A}{2}) \cdot \cos(\frac{B}{2}) \cdot \cos(\frac{C}{2}) \geq 2\sin(\frac{A}{2}) \cdot \cos(\frac{A}{2}) \cdot 2\sin(\frac{B}{2}) \cdot \cos(\frac{B}{2}) \cdot 2\sin(\frac{C}{2}) \cdot \cos(\frac{C}{2})$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \geq \sin(\dfrac{A}{2}) \cdot \sin(\dfrac{B}{2}) \cdot \sin(\dfrac{C}{2})$, ceea ce este adevărat. Prin asta, inegalitatea inițială este demonstrată.

Probleme propuse:

1. Fie $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ pentru care $a^2 = x^2 + xy + y^2$ și $b^2 = x^2 + xz + z^2$. Arătați că $(a+b)^2 \neq y^2 + yz + z^2$.

2. Fie M un punct în planul triunghiului echilateral ABC de latură 1. Arătați că $MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MA \geq 1$. (OLM Argeș, 2001)

3. (Inegalitatea lui Mitrinovic) Demonstrați că în orice triunghi are loc dubla inegalitate

$$3\sqrt{3} \cdot r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} R$$

4. Arătați ca într-un triunghi oarecare ABC are loc relația $\frac{r}{R} \leq \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

5. (L. Panaitopol, Gazeta Matematică 1983) Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc $l_a - h_a \leq R - 2r$,

unde l_a și h_a sunt lungimile bisectoarei și înălțimii din A.

Bibliografie:

Culegere “Matematiă de excelență” editura Paralela 45
Site-ul viitoriolimpici.ro
“Inegalități matematice – provocări in utilizarea programei școlare” – Mirela Pîrvu

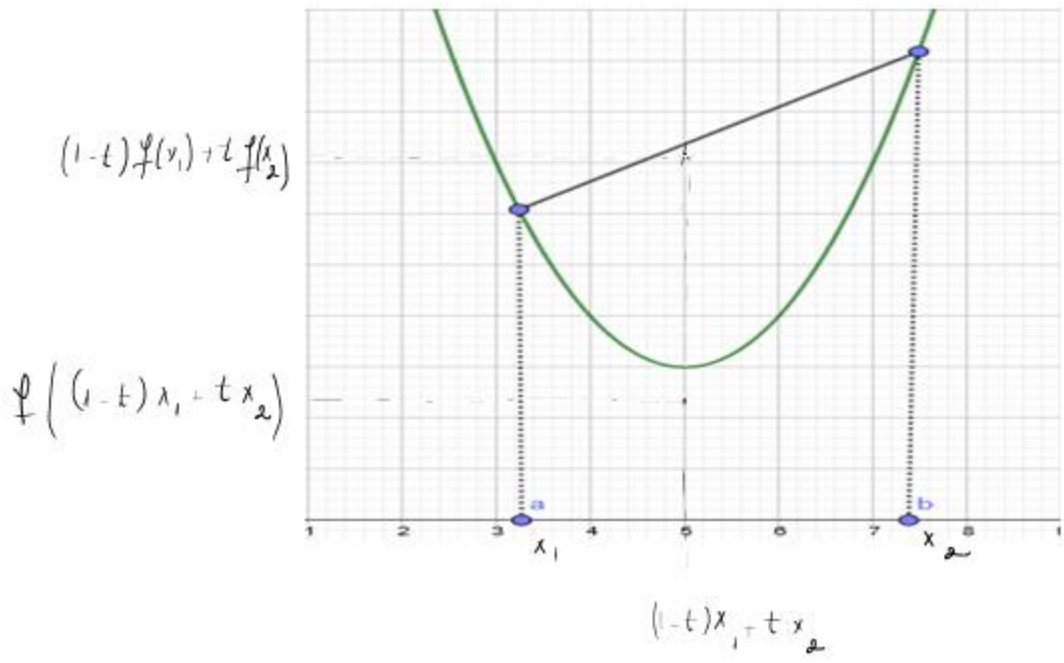
Inegalitatea lui Jensen

Prof. Doriana Dorca

Pentru început voi explica noțiunea de funcție convexă/concavă.

Matematic, o funcție este convexă dacă segmentul care unește oricare două puncte de pe graficul ei se află situat deasupra graficului cuprins între puncte.

Definiție: O funcție $f: I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval de numere reale, se numește **convexă** pe intervalul I dacă pentru orice numere $x_1, x_2 \in I$ și orice $t \in [0,1]$ are loc inegalitatea $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.



Definiție: O funcție $f: I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval de numere reale, se numește **concavă** pe intervalul I dacă pentru orice numere $x_1, x_2 \in I$ și orice $t \in [0,1]$ are loc inegalitatea $f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

Inegalitatea lui Jensen (IJ):

Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție convexă (concavă) pe I, atunci

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_i \in I, \forall \alpha_i > 0, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, avem:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \le (\ge) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Cazuri particulare folosite în demonstrarea inegalităților:

În cazul funcțiilor convexe avem de exemplu

Pentru $n = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ avem $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

Pentru $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ avem $f\left(\frac{x_1 + \ldots x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$

Aplicații:

1. Demonstrați că $\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{5}\right)^2 \ge 8$

Rezolvare:

Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$, f convexă pe mulțimea numerelor reale.

Avem $f\left(\frac{x + y}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2}$, unde $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{5}, y = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{5}, x + y = 4$

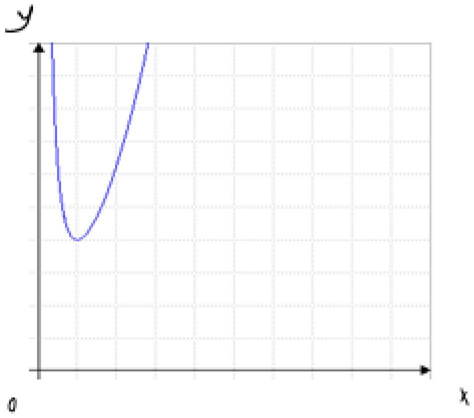
$f(2) \le \frac{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{5}\right)^2}{2}$ de unde rezultă cerința.

2. O inegalitate elementară demonstrată cu ajutorul IJ

Dacă x, y sunt numere reale strict pozitive astfel încât $x+y=1$ atunci $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Rezolvare :

Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(t)=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$ care este o funcție convexă pe domeniul de definiție



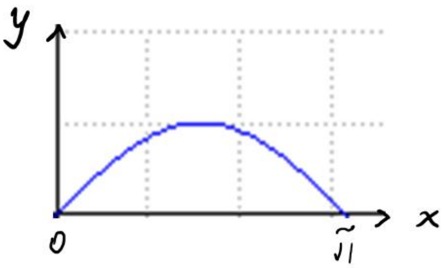
Avem $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)+f(y)}{2}\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{4}$

De unde avem că $f(x)+f(y)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geq\frac{25}{2}$

3.Dacă A,B,C sunt unghiurile interioare ale unui triunghi atunci avem $\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Rezolvare:

Fie funcția $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$, care este concavă pe domeniul de definiție



Avem , conform IJ că $f\left(\frac{A}{3}+\frac{B}{3}+\frac{C}{3}\right)\geq\frac{1}{3}f(A)+\frac{1}{3}f(B)+\frac{1}{3}f(C)$ sau

$\sin A+\sin B+\sin C\leq 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4.Dacă $x,y,z\in(0,\infty)$, demonstrați că: $(x+2y)^4+(y+2z)^4+(z+2x)^4\geq 3(x+y+z)^4$

Rezolvare:

1-Soluție clasică

Notăm $x+2y=a, y+2z=b, z+2x=c$ și avem de demonstrat că $a^4+b^4+c^4\geq 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$

Avem $3\left(a^4+b^4+c^4\right)=3\left[\left(a^2\right)^2+\left(b^2\right)^2+\left(c^2\right)^2\right]\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)^2$

2- Folosind IJ pentru funcția convexă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4$ avem $\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}\geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

Observație: problema studierii convexității/concavității unei funcții se va stabili în clasele superioare.

Bibliografie:

Drîmbe Mihai Onucu- Inegalități-idei și metode , Editura Gil, Zalău, 2000
Panaitopol L, Bădilă V, Lascu V –Inegalități , Editura Gil, Zalău, 1996
Becheanu Mircea și Enescu Bogdan- Inegalități elementare...și mai puțin elementare, Editura Gil, Zalău, 2002

Inegalitatea lui Minkowski

Iacob Diana și Timofte Ana

Despre Hermann Minkowski

- s-a născut în 1864, pe data de 22 iunie, în regatul Poloniei (care făcea parte din Imperiul Rus)
- originea matematicianului este interpretată diferit de la sursă la sursă, acesta fiind considerat un matematician german, polonez, germano-lituanian sau rus
- având predecesori evrei, s-a mutat în anii copilăriei în Königsberg (din cauza persecuției din Imperiul Rus), urmând să-și realizeze principalele studii tot acolo
- Minkowski a început mai apoi să predea în mai multe orașe germane iar în 1905 a lucrat cu studentul său, Albert Einstein la teorii ale relativității generale
- Unul dintre cei mai buni prieteni ai săi a fost David Hilbert, un alt matematician renumit cu care iubea să își împărtășească descoperirile
- Numele de Minkowski nu este însă cunoscut doar în domeniul matematicii, fratele lui, Oskar, fiind apreciat în domeniul cercetării medicale
- Minkowski a murit în 1909 (la 44 de ani) și a rămas cunoscut pentru că a creat și a dezvoltat geometria numerelor și a folosit metode geometrice ca să rezolve probleme dificile din teoria numerelor, fizică matematică, și teoria relativității.

Inegalitatea:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

Demonstrație:

Știm că: $(a_i+b_i)^2 = a_i(a_i+b_i)+b_i(a_i+b_i)$

Care se aplică și pentru suma a i termeni: $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)+\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)$ (1)

Folosim teorema lui Hölder: $\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ pentru termenii din dreapta

Înlocuind astfel:
$$p = q = 2$$
$$x = a$$
$$y = (a+b)$$

Rezultă: $\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$ (2)

Analog: $\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$ (3)

Din relația (1) și adunarea relațiilor (2) și (3) rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \qquad (4)$$

Împărțim relația (4) cu $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$

De unde rezultă forma dorită a teoremei lui Minkowski: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$

Forma generalizată a inegalității lui Minkowski:

$[\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p]^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} y_i^p)^{\frac{1}{p}}$ (în care noi am demonstrat inegalitatea pentru p=2)

Aplicații:

1. Dacă u, v, s, t sunt numere reale, atunci: $\sqrt{u^2 + v^2} + \sqrt{s^2 + t^2} \ge \sqrt{(u+s)^2 + (v+t)^2}$

Rezolvare:

Observăm că tot ce este sub radical este pozitiv, și atunci putem să ridicăm relația la puterea a doua:

$$u^2 + v^2 + s^2 + t^2 + 2\sqrt{u^2 s^2 + u^2 t^2 + v^2 s^2 + v^2 t^2} \ge (u+s)^2 + (v+t)^2$$

=> $u^2 + v^2 + s^2 + t^2 + 2\sqrt{u^2 s^2 + u^2 t^2 + v^2 s^2 + v^2 t^2} \ge u^2 + 2us + s^2 + v^2 + 2vt + t^2$

Scădem din ambele părți u^2, v^2, s^2 și t^2: $2\sqrt{u^2 s^2 + u^2 t^2 + v^2 s^2 + v^2 t^2} \ge 2(us + vt)$

Împărțim relația la 2: $\sqrt{u^2s^2+u^2t^2+v^2s^2+v^2t^2} \geq (us+vt)$

$\Rightarrow u^2s^2+u^2t^2+v^2s^2+v^2t^2 \geq u^2s^2+2ustv+v^2t^2$

Scădem u^2s^2 și v^2t^2 din ambele părți: $u^2t^2+v^2s^2 \geq 2ustv$

$\Rightarrow u^2t^2-2ustv+v^2s^2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $(ut-vs)^2 \geq 0$ - Adevărat

Generalizarea acestei forme a inegalității lui Minkowski:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}$$

2.Fie x și y soluțiile pozitive ale ecuației: $18x^2+24xy+8y^2-15x-10y-3=0$.

Demonstrați: $5-\sqrt{4y^2+7+4\sqrt{3}} \leq \sqrt{9x^2+7-4\sqrt{3}}$ (*)

Dând factor comun 2 respectiv 5, rescriem relația dată ca: $2(3x+2y)^2-5(3x+2y)-3=0$

Notăm $(3x+2y)$ cu a: $2a^2-5a-3=0$ - funcție de gradul II

$\Delta=25+24=49$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\Delta}=7$

Avem: $a_1=\frac{5+7}{4}=3$ și $a_2=\frac{2-7}{4}=\frac{-1}{2}$

Dar $x,y \geq 0$ $\Rightarrow$ $a=3=3x+2y$ (1)

Rescriem inegalitatea (*) ca: $\sqrt{9x^2+7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4y^2+7+4\sqrt{3}} \geq 5$

Folosim Inegalitatea lui Minkowski demonstrată anterior: $\sqrt{u^2+v^2}+\sqrt{s^2+t^2} \geq \sqrt{(u+s)^2+(v+t)^2}$

Înlocuind astfel: $u=3x,\ v=2-\sqrt{3},\ s=2y,$ și $t=2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{9x^2+7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4y^2+7+4\sqrt{3}} \geq \sqrt{(3x+2y)^2+4^2}$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $\sqrt{(3x+2y)^2+4^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ (3)

Din (2) și (3) $\Rightarrow$ $\sqrt{9x^2+7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4y^2+7+4\sqrt{3}} \geq 5$ - Adevărat.

Bibliografie :

Eremia Georgescu-Buzău, Eugen Onofraș - Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu

Revista de matematică editată de Catedra de matematică a Colegiului Național ”Gheorghe Șincai”, Baia Mare- Argument 13

Inegalitatea lui Schur

Iagăru Dragoş, Dospinescu Tudor
și Budrala David

Cine este Schur?

Issai Schur s-a născut pe 10 ianuarie 1875 la Mogilev și a decedat pe data de 10 ianuarie, 1941 în Tel Aviv, a fost un matematician care a lucrat în Germania. A studiat la Berlin. El a obținut doctoratul în 1901, a devenit lector în 1903 și, după o ședere la Bonn, profesor în 1919.A lucrat la reprezentări de grup, dar și in combinatorică și teoria numerelor și chiar in fizica teoretică.

Inegalitatea lui Schur

Daca x, y, z sunt numere reale pozitive, atunci pentru orice $t \geq 0$ avem:

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-x)(y-z)+z^t(z-x)(z-y) \geq 0$$

cu egalitate dacă ¸si numai dacă x = y = z sau dacă două dintre numerele x, y, z sunt egale ¸si al treilea este nul; daca xyz = 0, impunem restricția t > 0.

Despre Valentin Vornicu

Vornicu, in 2007, a descoperit o forma generalizata a inegalitatii lui Schur, de obicei citata pe forumurile online drept „Inegalitatea Vornicu-Schur”, pe care a publicat-o intr-o carte de rezolvare a problemelor intitulata „Olimpiada de Matematica”.

Aplicație:

Fie $x, y, z \in (0, +\infty)$ astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2(xy + yz + zx)$.

Arătați că $9xyz \geq x + y + z$.

Rezolvare:

Din inegalitatea lui Schur, când t=1, avem:

$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$ (1)

Folosind (1) și identitatea $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 = xy - yz - zx)$ vom demonstra că $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

$$(x+y+z)^3 + 9xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + 9xyz =$$
$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 6xyz =$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 3xyz = s$$

Din (1): $s \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 3xyz + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) =$

$$= xy(x+y) + xyz + yz(y+z) + xyz + zx(z+x) + xyz + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) =$$
$$= xy(x+y+z) + yz(x+y+z) + zx(x+y+z) + 3(x+y+z)(xy+yz+zx)$$
$$= 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

Astfel, putem spune că $9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx) - (x+y+z)^3 = (x+y+z)(4xy + 4yz + 4zx - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2yz - 2zx) =$

$$= (x+y+z)\big(2(xy+yz+zx) - (x^2+y^2+z^2)\big)$$
$$= (x+y+z)\big(x^2+y^2+z^2+1 - (x^2+y^2+z^2)\big) = (x+y+z)$$

Bibliografie:

https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.files.wordpress.com/2016/07/a-brojbeanu-inegalitatea-lui-schur.pdf

Inegalitatea lui Panaitopol

Dănoiu Dragoş şi Ciovică Ianis

Laurențiu Panaitopol a fost un renumit matematician român care s-a stins în anul 2008 dar care a lăsat în urmă inegalitatea care îi poartă numele și este enunțată astfel:

În orice triunghi ABC are loc

$(\boldsymbol{P})\ \boldsymbol{la - ha \leq R - 2r}$,

$\boldsymbol{la}$=lungimea bisectoarei din A

ha=lungimea înălțimii din A

$\boldsymbol{R}$=raza cercului circumscris

r=raza cercului inscris

Soluție

Deoarece este o inegalitate "liniară", acest lucru îi mărește gradul de dificultate. Ca în multe alte situații, întărirea inegalității poate să sugereze o "cale de atac" mai comodă.

Cum $la \leq \sqrt{(p-a)}$ (majorare de "clasa"), ne propunem să studiem valabilitatea inegalității întărite

$(P\,')\ \sqrt{(p-a)} - ha \leq R - 2r$.

Avem $\sqrt{(p-a)} - ha = \sqrt{bc}\cos A/2 - bc/2R \leq (Rcos^2 A/2 + bc/4R) - bc/2R =$

$= R\,(sin^2 (B+C)/2 - \sin B sin\, C) = Rsin^2 (B-C)/2$.

Am demonstrat că are loc: $(P\,'')\ \ \sqrt{(p-a)} - ha \leq Rsin^2 (B-C)/2$, cu egalitate doar dacă

$Rcos^2 A/2 = bc/4R \Leftrightarrow \cos(B-C) = 1 \Leftrightarrow B =$ C; (Triunghiul ABC este isoscel cu baza BC).

Încheiem metoda intercalării demonstrând inegalitatea: $(P\,''')\ \ Rsin^2 (B-C)/2 \leq R - 2$r

Dacă O și I sunt centrele cercurilor circumscris și înscris, iar T este proiecția lui O pe bisectoarea interioară a unghiului B , inegalitatea de mai sus este echivalentă cu $OT^2 \leq OI^2$, adică

$OT \leq OI$ (adevărat)

Avem egalitate în $(P\,''')$ dacă $2a = b +$ c.

Bibliografie:
https://www.ccdfocsani.ro/utile/Inegalitati%20matematice%20provocare%20programa%20scolara.pdf

Articolele au fost culese și selectate de elevii:

Albescu David	Fleacă Anastasia Maria
Alexandrov Alexandru	Gușe Tudor
Bischin Daniel	Iacob Diana
Bîja Alexandra	Iagăru Dragoș
Budrala David	Junger Ernest
Ciovică Ianis	Orza Anamaria
Corabian Andrei	Penteleiciuc Maria-Lavinia
Crețu Victor	Săulescu Valentin
Dănoiu Dragoș	Timofte Ana
Dospinescu Miruna	Țeposu Vlad
Dospinescu Tudor	Tusan Radu

Coordonator: prof. Dorca Doriana

Corectori: prof. Dorca Doriana, Bischin Daniel

Realizare copertă și ilustrații: Dospinescu Miruna

Editor: Dospinescu Miruna